10 Differentiëren

Voorkennis Machten en differentiequotiënten

Bladzijde 112

1 **a** $\sqrt[7]{x^3} = x^{\frac{3}{7}}$

b $\dfrac{1}{x^7} = x^{-7}$

c $x^2 \cdot \sqrt{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{2\frac{1}{2}}$

d $\dfrac{1}{x^3} \cdot \sqrt[4]{x} = x^{-3} \cdot x^{\frac{1}{4}} = x^{-2\frac{3}{4}}$

e $x^{-1,3} \cdot \left(x^{0,7}\right)^3 = x^{-1,3} \cdot x^{2,1} = x^{0,8}$

f $\dfrac{x^{2,4}}{\sqrt{x}} = \dfrac{x^{2,4}}{x^{0,5}} = x^{1,9}$

Bladzijde 113

2 **a** $y = 3x^5 \cdot 7 \cdot \sqrt[6]{x} = 3x^5 \cdot 7x^{\frac{1}{6}} = 21x^{5\frac{1}{6}}$, dus $y = 21x^{5\frac{1}{6}}$.

b $y = \dfrac{70x}{\left(2\sqrt{x}\right)^3} = \dfrac{70x}{2^3 \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3} = \dfrac{70x}{8x^{1\frac{1}{2}}} = 8\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}$, dus $y = 8\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}$.

c $y = 6x \cdot \sqrt[3]{x^2} = 6x \cdot x^{\frac{2}{3}} = 6x^{1\frac{2}{3}}$, dus $y = 6x^{1\frac{2}{3}}$.

d $y = \dfrac{15x^{-1,8}}{5x^{0,9}} = 3x^{-2,7}$, dus $y = 3x^{-2,7}$.

e $y = 1{,}8x^{-1,7} \cdot (5x^{-2,6})^2 = 1{,}8x^{-1,7} \cdot 25x^{-5,2} = 45x^{-6,9}$, dus $y = 45x^{-6,9}$.

f $y = \dfrac{75}{x} \cdot \dfrac{1}{5x^2} \cdot 4x^3 = 75x^{-1} \cdot \frac{1}{5}x^{-2} \cdot 4x^3 = 60x^0$, dus $y = 60x^0$.

3 **a** Op [−3, 2] is $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{3-2}{2--3} = \frac{1}{5}$.

b Op [−1, 3] is $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1-0}{3--1} = \frac{1}{4}$.
De gemiddelde verandering is $\frac{1}{4}$.

c $\text{rc}_{AB} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1-3}{5-2} = \dfrac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$.

d Op [−3, 1] is $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{3-2}{1--3} = \frac{1}{4}$.
De gemiddelde snelheid is $\frac{1}{4}$.

4 **a** $x = -2$ geeft $y = 0{,}5$ en $x = 5$ geeft $y = 1{,}9$.
Op [−2, 5] is $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1{,}9-0{,}5}{5--2} = \dfrac{1{,}4}{7} = 0{,}2$.

b $x = 1$ geeft $y = -3{,}7$ en $x = 3$ geeft $y = -2{,}5$.
Op [1, 3] is $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-2{,}5--3{,}7}{3-1} = \dfrac{1{,}2}{2} = 0{,}6$.

c $x = -3$ geeft $y = 3{,}5$ en $x = 3$ geeft $y = -2{,}5$.
Op [−3, 3] is $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-2{,}5-3{,}5}{3--3} = \dfrac{-6}{6} = -1$.
De gemiddelde verandering is −1.

10

10.1 Snelheden en raaklijnen

Bladzijde 114

1 **a** 10 km in 8 minuten, dus $\frac{60}{8} \cdot 10 = 75$ km/uur.
b Bij een gemiddelde snelheid van 75 km/uur kun je op één moment veel harder hebben gereden.

Bladzijde 115

2 Op [3; 3,01] is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0{,}4 \cdot 3{,}01^2 - 0{,}4 \cdot 3^2}{0{,}01} = 2{,}404$.
De snelheid op $t = 3$ is bij benadering 2,40 m/s.

3 Op [1; 1,01] is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{8 - \frac{5}{1{,}01 + 2} - \left(8 - \frac{5}{1 + 2}\right)}{0{,}01} \approx 0{,}55$.
De snelheid op $t = 1$ is bij benadering 0,55 m/s.

4 Op [3; 3,001] is $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1{,}20 \cdot 1{,}15^{3{,}001} - 1{,}20 \cdot 1{,}15^3}{0{,}001} \approx 0{,}2551$.
De snelheid op $t = 3$ is bij benadering 0,26 m^2/dag.

Bladzijde 116

5 Van de lijn AB_4 komt de richtingscoëfficiënt het dichtst in de buurt.

Bladzijde 118

6 **a** De raaklijn gaat door de punten (5, 70) en (10, 120).
De richtingscoëfficiënt is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{120 - 70}{10 - 5} = 10$.
De snelheid op $t = 8$ is 10 km/uur.
b Teken de raaklijn in het punt met $t = 3$. Deze gaat door de punten (0, 30) en (6, 70).
De richtingscoëfficiënt is $\frac{70 - 30}{6 - 0} \approx 6{,}7$. De snelheid op $t = 3$ is 6,7 km/uur.
c Omdat de grafiek afnemend stijgend is op [0, 4], neemt de snelheid af.
d Op $t = 4$ is de snelheid minimaal.

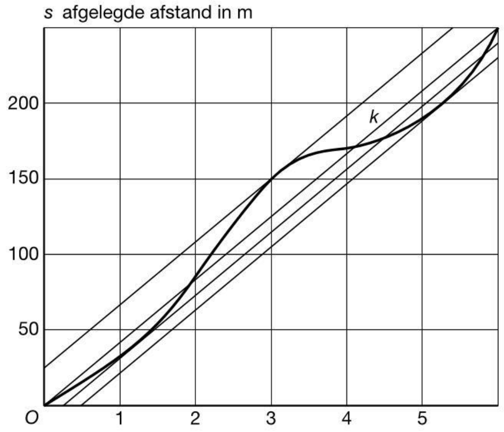
7 **a** Omdat de grafiek van Kuipers een rechte lijn is, is de snelheid van Kuipers constant.
Zijn snelheid is $\frac{3000}{12}$ m/minuut = 15 km/uur.
b Nijhuis start snel en loopt steeds langzamer.
c Teken de raaklijn aan de grafiek van Nijhuis door het punt (7, 1750). Deze raaklijn gaat door de punten (4, 1250) en (10, 2250).
De snelheid na 7 minuten is $\frac{2250 - 1250}{10 - 4} = \frac{1000}{6}$ m/minuut = 10 km/uur.
d De raaklijn aan de grafiek van Nijhuis door het punt (12, 2500) gaat ook door het punt (10, 2250).
Dus de snelheid na 12 minuten is $\frac{2500 - 2250}{12 - 10} = 125$ m/minuut = 7,5 km/uur.
e Ze lopen even hard op het moment dat de grafieken even steil zijn. De raaklijn aan de grafiek van Nijhuis is evenwijdig met de grafiek van Kuipers na ongeveer $3\frac{1}{2}$ minuut.
f Nijhuisloopt 2500 m in 12 minuten. Dat moeten er minstens 2700 zijn.

8 **a** Teken de raaklijn in het punt (3, 150). De helling van deze raaklijn is ongeveer $\frac{50}{1} = 50$. Dus de snelheid op $t = 3$ is ongeveer 50 m/s.
Teken de raaklijn in het punt (5, 190). De helling van deze raaklijn is ongeveer $\frac{30}{1} = 30$.
Dus de snelheid op $t = 5$ is ongeveer 30 m/s.
b De helling is het kleinst voor $t = 4$. Dus daar is de snelheid minimaal.

10

© Noordhoff Uitgevers bv

c Teken de lijn k door (0, 0) en (6, 250). De grafiek heeft drie raaklijnen die evenwijdig zijn met k. Dus er zijn drie tijdstippen waarop de snelheid gelijk is aan de gemiddelde snelheid op [0, 6].



Bladzijde 119

9 **a** De raaklijn die hoort bij $t = 6$ valt op het interval [2, 10] samen met de grafiek. De raaklijn gaat door de punten (2, 80) en (10, 120). Dus de groeisnelheid is $\frac{120 - 80}{10 - 2} = \frac{40}{8} = 5$ cm/jaar.

b De raaklijn die hoort bij $t = 14$ gaat door de punten (12, 130) en (16, 190). Rond haar veertiende verjaardag is Lotte's groeisnelheid $\frac{190 - 130}{16 - 12} = 15$ cm/jaar.

c De gemiddelde groeisnelheid van 0 tot 18 jaar is $\frac{180 - 50}{18} \approx 7{,}2$ cm/jaar.

d Teken de lijn k door de punten (0, 50) en (18, 180). Deze lijn hoort bij de gemiddelde groeisnelheid van 0 tot 18 jaar. Verschuif deze lijn evenwijdig.
Je vindt drie raaklijnen die evenwijdig met k zijn.
Deze raken de grafiek bij $t \approx 1{,}5$, $t \approx 11$ en $t \approx 15$.
Dus bij de leeftijden van 1,5, 11 en 15 jaar is de groeisnelheid van Lotte gelijk aan 7,2 cm/jaar.

10 **a** De helling in punt A met $x_A = -3$ is bij benadering het differentiequotiënt op het interval [−3; −2,999].

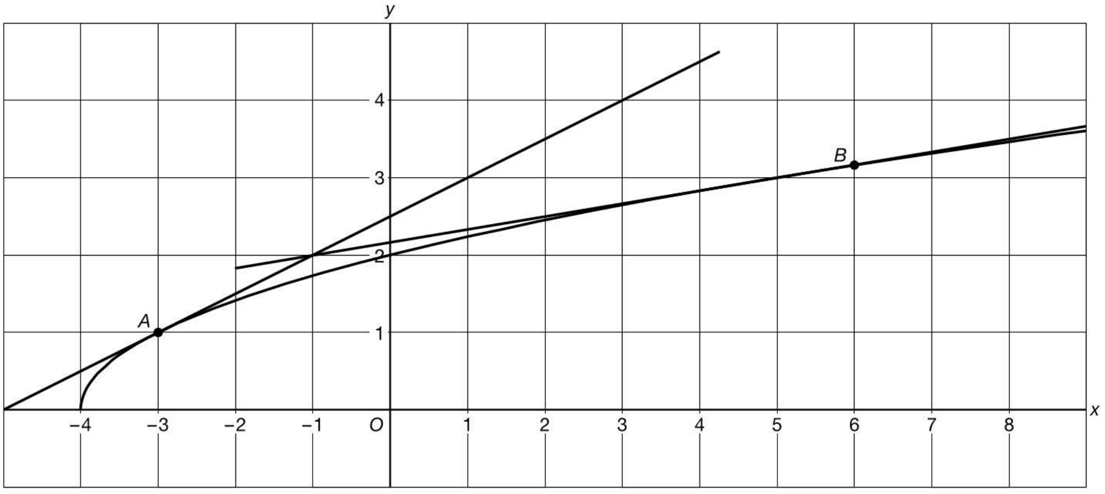
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{-2{,}999 + 4} - \sqrt{-3 + 4}}{0{,}001} \approx 0{,}50$$

De helling in punt B met $x_B = 6$ is bij benadering het differentiequotiënt op het interval [6; 6,001].

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{6{,}001 + 4} - \sqrt{6 + 4}}{0{,}001} \approx 0{,}16$$

b

x	−4	−3	0	5
$y = \sqrt{x + 4}$	0	1	2	3



© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 120

11 **a** Voer in $y_1 = 0{,}04x^2 + 0{,}3x + 20$.

De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=20} = 1{,}9$.

De gevraagde snelheid is € 1,90 per kg.

b Bij een productie van 3200 kg hoort $q = 3{,}2$.

De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=3{,}2} = 0{,}556$.

De gevraagde snelheid is € 0,56 per kg.

c Bij een productie van 8160 kg hoort $q = 8{,}16$.

De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=8{,}16} = 0{,}9528$.

De gevraagde snelheid is € 0,95 per dag.

12 **a** Voer in $y_1 = 2000/(1 + 12 \cdot 0{,}95^x)$.

De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=10} \approx 11{,}0$.

De gevraagde snelheid is 11 vissen per week.

b De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=33} \approx 22{,}0$.

Op $t = 33$ is de snelheid 22 vissen per week.
Dus Arjen heeft gelijk

c De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=100} \approx 6{,}35$.

Dus de snelheid is op $t = 100$ is kleiner dan de snelheid op $t = 33$ en daarom heeft Tess niet gelijk.

13 **a** Bij 1 mei om 17:30 uur hoort $t = 5{,}5$.
Voer in $y_1 = 37 + 45x/(x^2 + 70)$.

De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=5{,}5} \approx 0{,}18$.

De gevraagde snelheid is 0,18 °C per uur.

b Bij 2 mei om 08:00 uur hoort $t = 20$.

De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=20} \approx -0{,}07$.

De gevraagde snelheid is 0,07 °C per uur.

c De optie maximum geeft $x = 8{,}36\ldots$ en $y \approx 39{,}7$.
De maximale temperatuur is ongeveer 39,7 °C.
Bij $t = 8{,}36\ldots$ hoort het tijdstip 1 mei om 20:22 uur.
Dus de griep is op zijn hoogtepunt op 1 mei om 20:22 uur.

d Voer in $y_2 = 39$.
Intersect geeft $x \approx 3{,}73$ en $x \approx 18{,}77$.
$18{,}77 - 3{,}73 = 15{,}04$
Dus de lichaamstemperatuur is iets meer dan 15 uur boven 39 °C.

Bladzijde 121

14 **a** De snelheid waarmee het aantal personen dat zich op een zaterdag in het warenhuis bevindt toeneemt om 13:00 uur is 24 personen per uur.

b *

c toe af

Bladzijde 122

15 **a** Voer in $y_1 = -0{,}2x^3 + 4{,}5x^2 + 80x + 500$.
Bij 1 januari 2000 hoort $t = 10$.

$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=10} = 110 > 0$, dus op 1 januari 2000 nam het aantal rendieren toe.

© Noordhoff Uitgevers bv

b Bij 1 juli 2015 hoort $t = 25{,}5$.

$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=25{,}5} = -80{,}65 < 0$, dus op 1 juli 2015 nam N af: het aantal rendieren was over het hoogtepunt heen.

c De optie maximum geeft $x \approx 21{,}3$ en $y \approx 2313$.
Dus $t \approx 21{,}3$ hoort 2011, dus in 2011 was het aantal rendieren maximaal.

d Bij 1 oktober 2018 hoort $t = 28\frac{9}{12} = 28{,}75$.

De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=28{,}75} = -157{,}1875$.

De snelheid waarmee het aantal rendieren afneemt is 157 rendieren per jaar.

16 **a** Voer in $y_1 = 270x^2 - 15x^3$.

$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=3{,}5} = 1338{,}75 > 0$, dus op $t = 3{,}5$ neemt het aantal grieppatiënten toe.

b $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=8} = 1440 > 0$, dus op $t = 8$ neemt N nog toe: de griepepidemie heeft het hoogtepunt nog niet bereikt.

c $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=14} = -1260$, dus de afname is 1260 per dag.

$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=17} = -3825$, dus de afname is 3825 per dag.

$\frac{3825}{1260} \approx 3{,}04$, dus het aantal grieppatiënten neemt op $t = 17$ ongeveer drie keer zo snel af als op $t = 14$.

d 3% van 50 000 is $0{,}03 \cdot 50\,000 = 1500$
Voer in $y_2 = 1500$.
Intersect geeft $x \approx 2{,}5$ en $x \approx 17{,}7$.
Dus gedurende $17{,}7 - 2{,}5 \approx 15$ dagen.

e Voer in $y_2 = 10\,000$.
Intersect geeft $x \approx 8{,}28$ en $x \approx 15{,}06$.

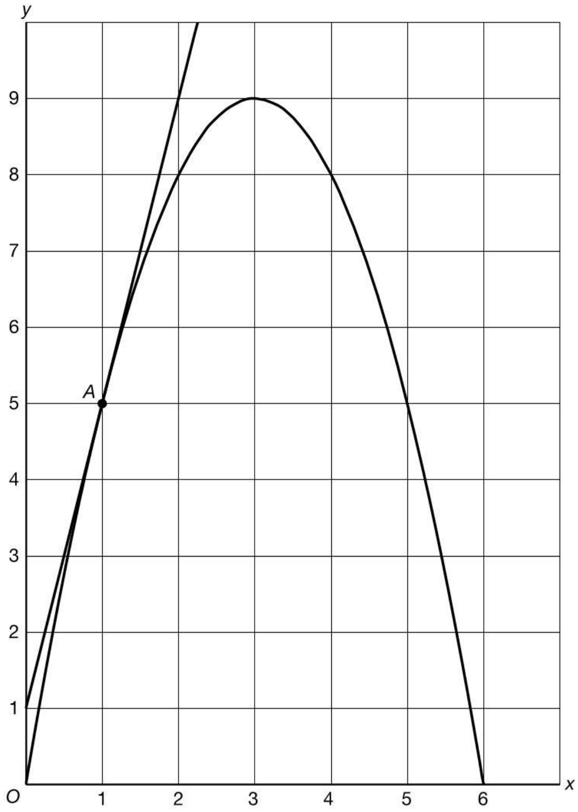
$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=8{,}28} \approx 1386$ en $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=15{,}06} \approx -2074$

De gevraagde snelheden zijn 1386 en −2074 patiënten per dag.

f De snelheid waarmee het aantal patiënten verandert is gelijk aan 0 in de top van de grafiek.
De optie maximum geeft $x = 12$ en $y = 12\,960$.
Dus op het tijdstip $t = 12$.

17 Voer in $y_1 = 6x - x^2$.

helling $= \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1} = 4$



© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 123

18 **a** Voer in $y_1 = x^2 + x - 2$.

$k: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=3} = 7$

$\left.\begin{array}{l} y = 7x + b \\ x = 3 \text{ geeft } y = 10, \text{ dus } A(3,10) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 7 \cdot 3 + b = 10 \\ 21 + b = 10 \\ b = -11 \end{array}$

Dus $k: y = 7x - 11$.

b Voer in $y_1 = \frac{2}{x-1} + 3$.

$m: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=3} = -0{,}5$

$\left.\begin{array}{l} y = -0{,}5x + b \\ x = 3 \text{ geeft } y = 4, \text{ dus } B(3,4) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -0{,}5 \cdot 3 + b = 4 \\ -1{,}5 + b = 4 \\ b = 5{,}5 \end{array}$

Dus $m: y = -0{,}5x + 5{,}5$

19 **a** Voer in $y_1 = 0{,}5x^2 - 2x - 2$.

$\text{rc}_k = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=3} = 1$

$\left.\begin{array}{l} k: A = p + b \\ R(3; -3{,}5) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3 + b = -3{,}5 \\ b = -6{,}5 \end{array}$

Dus $k: A = p - 6{,}5$.

b S op de A-as dus $p = 0$.

$l: A = ap + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0} = -2$

$l: A = -2p + b$

$p = 0$ geeft $A = -2$, dus $l: A = -2p - 2$.

20 **a** Voer in $y_1 = 3\sqrt{x+4}$.

$k: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=5} = 0{,}5$

$\left.\begin{array}{l} y = 0{,}5x + b \\ x = 5 \text{ geeft } y = 9, \text{ dus } P(5,9) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0{,}5 \cdot 5 + b = 9 \\ 2{,}5 + b = 9 \\ b = 6{,}5 \end{array}$

Dus $k: y = 0{,}5x + 6{,}5$.

b $l: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=-3} = 1{,}5$

$\left.\begin{array}{l} y = 1{,}5x + b \\ x = -3 \text{ geeft } y = 3, \text{ dus } A(-3,3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1{,}5 \cdot -3 + b = 3 \\ -4{,}5 + b = 3 \\ b = 7{,}5 \end{array}$

Dus $l: y = 1{,}5x + 7{,}5$.

c snelheid $= \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=2{,}25} = 0{,}6$

d R op de y-as dus $x_R = 0$.

$m: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0} = 0{,}75$

$\left.\begin{array}{l} y = 0{,}75x + b \\ x = 0 \text{ geeft } y = 6, \text{ dus } R(0,6) \end{array}\right\}$ Dus $m: y = 0{,}75x + 6$.

 © Noordhoff Uitgevers bv

10.2 Hellinggrafieken

Bladzijde 125

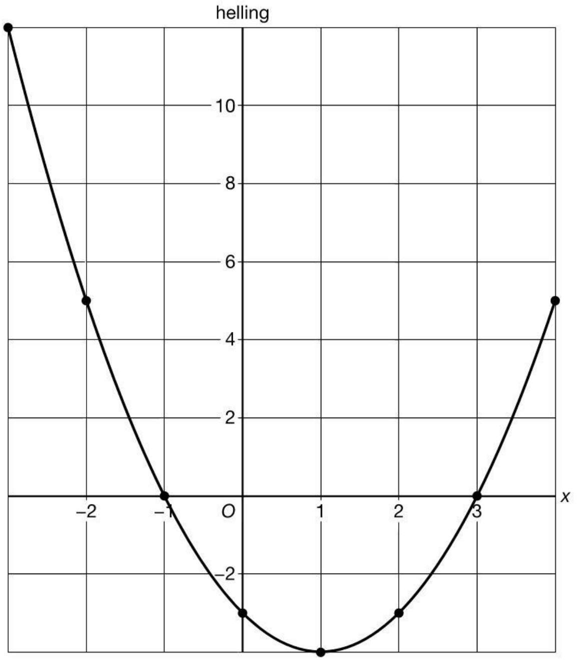
21 **a** positief
negatief

b In de toppen is de helling nul.

c Voer in $y_1 = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
helling	12	5	0	−3	−4	−3	0	5

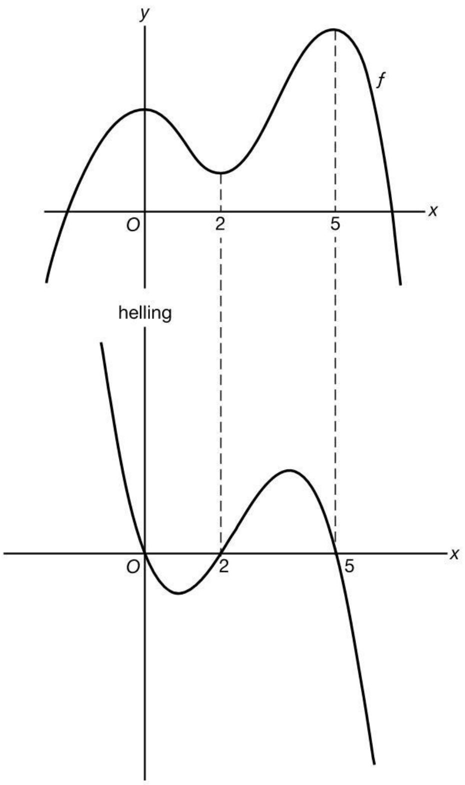
d



Bladzijde 127

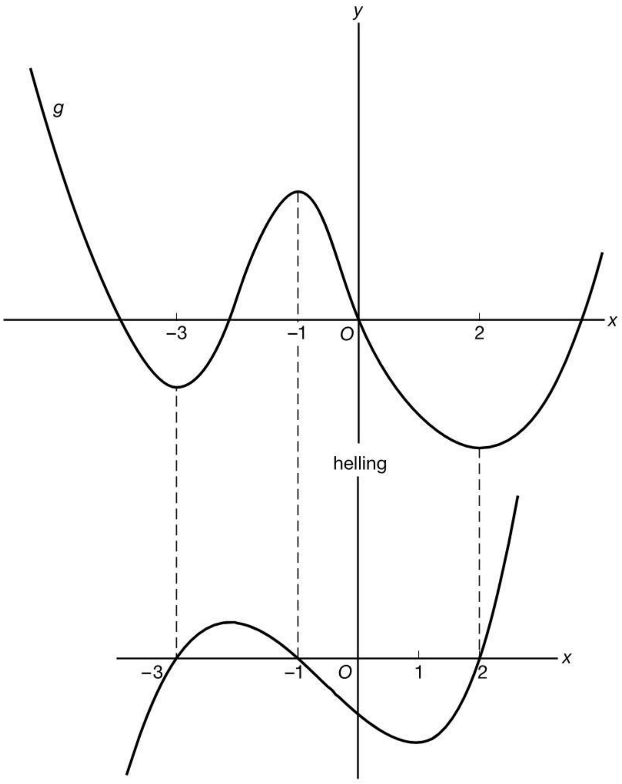
22 Bij f hoort hellinggrafiek B.
Bij g hoort hellinggrafiek D.
Bij h hoort hellinggrafiek A.
Bij k hoort hellinggrafiek C.

23 **a**

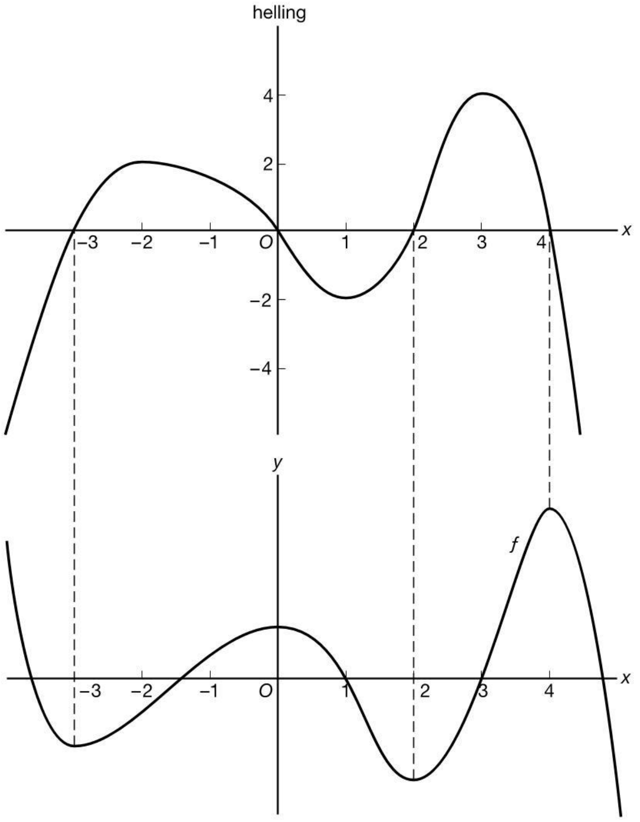


10

b



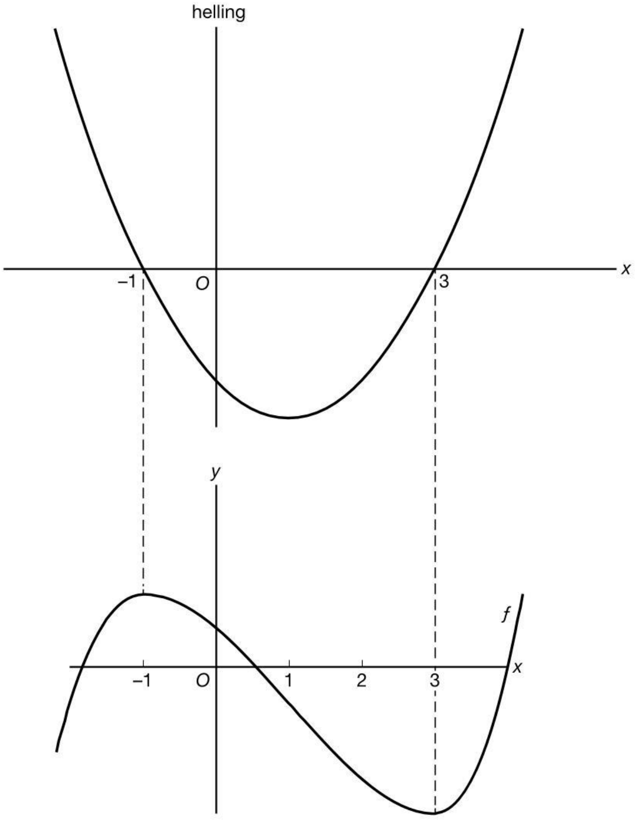
24 **a** De grafiek van *f* is dalend op ⟨←, −3⟩ omdat de helling van de grafiek op ⟨←, −3⟩ kleiner is dan 0.
b De grafiek van *f* heeft een top bij $x = -3$ omdat de hellinggrafiek daar de *x*-as snijdt.
Dat is een laagste punt.
c De grafiek van *f* is stijgend op ⟨−3, 0⟩.
d De grafiek van *f* heeft een hoogste punt bij $x = 0$. De grafiek gaat bij $x = 0$ over van stijgend (hellinggrafiek ligt boven de *x*-as) naar dalend (hellinggrafiek ligt onder de *x*-as).
e



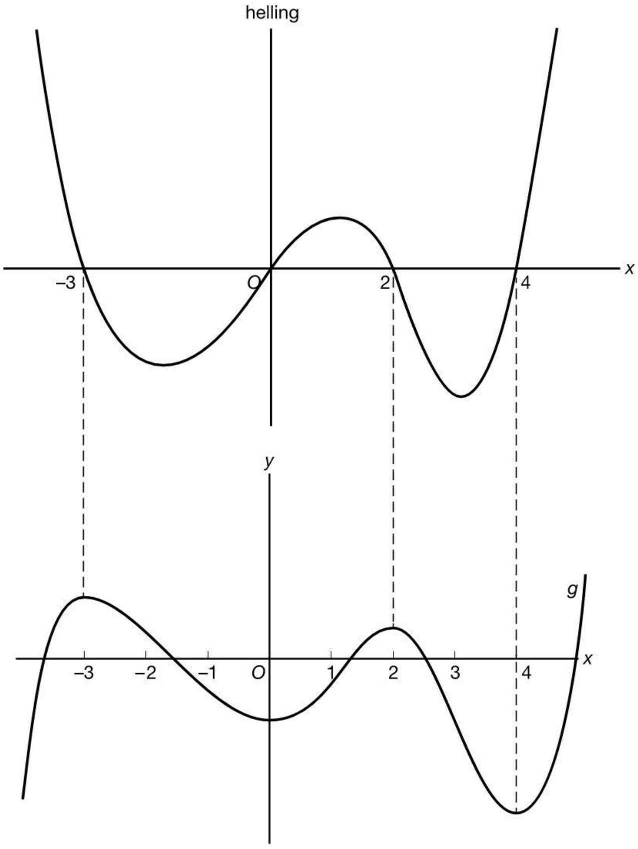
© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 128

25 **a**



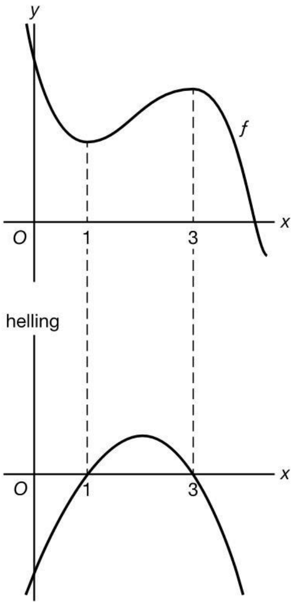
b



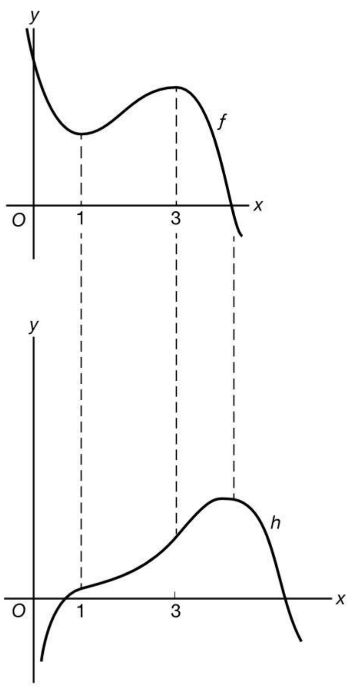
10

© Noordhoff Uitgevers bv

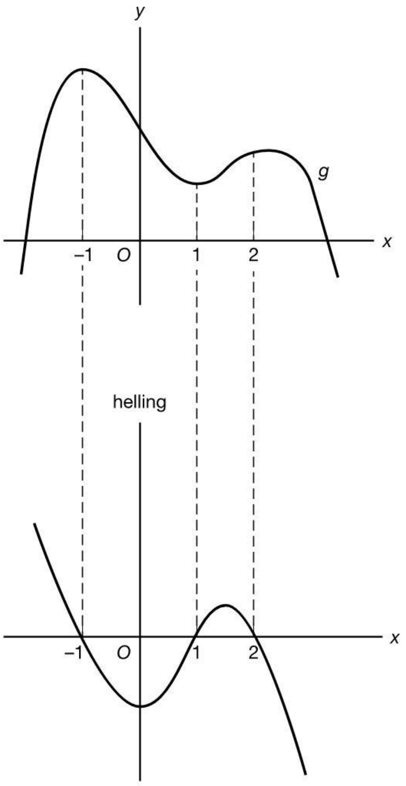
26 **a**



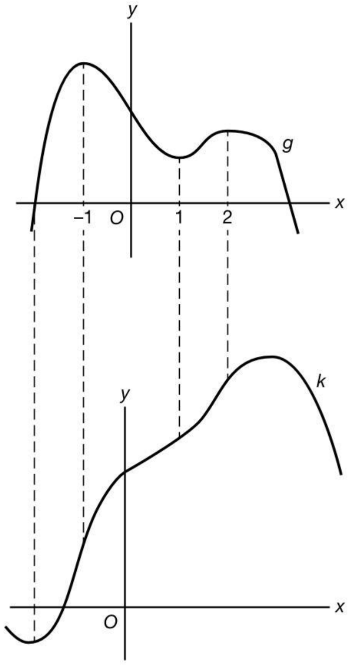
c



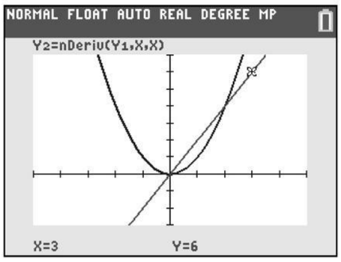
b



d



27 **a**



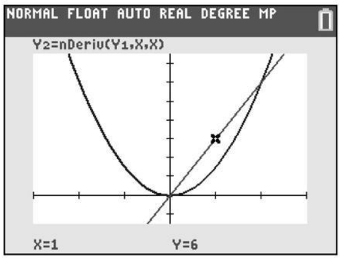
b De lijn gaat door (0, 0) en (1, 2), dus $a = 2$.

c De helling is $2 \cdot 36 = 72$.

© Noordhoff Uitgevers bv

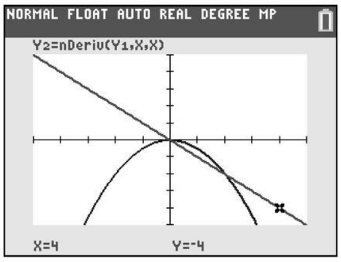
Bladzijde 129

28 **a**



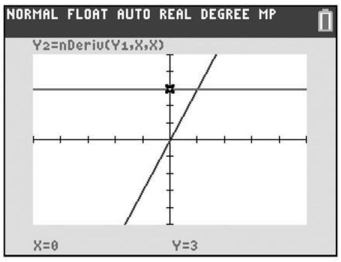
b Een lijn door (0, 0) en (1, 6), dus $y = 6x$.

c



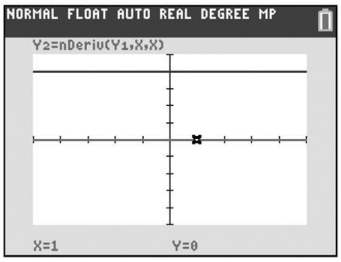
d Een lijn door (0, 0) en (1, −1), dus $y = -x$.

29 **a**



b Voor elke x is de helling gelijk, omdat het een rechte lijn is.
c $y = 3$

d



e $y = 0$

Bladzijde 130

30 **a** $f(x) = -8x^2 + 7$ geeft $f'(x) = -16x$
b $g(x) = -8x^2 + 7x$ geeft $g'(x) = -16x + 7$
c $h(x) = -x^2 + 8x - 3$ geeft $h'(x) = -2x + 8$
d $k(x) = -0{,}25x^2 + x - 1$ geeft $k'(x) = -0{,}5x + 1$

31 **a** $f(x) = (5x + 7)(4 - 3x) = 20x - 15x^2 + 28 - 21x = -15x^2 - x + 28$
geeft $f'(x) = -30x - 1$
b $g(x) = (3x + 6)^2 - 8x = 9x^2 + 36x + 36 - 8x = 9x^2 + 28x + 36$
geeft $g'(x) = 18x + 28$
c $h(x) = 5(x - 3)^2 + 5(2x - 1) = 5(x^2 - 6x + 9) + 10x - 5 = 5x^2 - 30x + 45 + 10x - 5 = 5x^2 - 20x + 40$
geeft $h'(x) = 10x - 20$
d $k(x) = -3(x - 1)(5 - 9x) - 8(x - 7) = -3(5x - 9x^2 - 5 + 9x) - 8x + 56 =$
$-3(- 9x^2 + 14x - 5) - 8x + 56 = 27x^2 - 42x + 15 - 8x + 56 = 27x^2 - 50x + 71$
geeft $k'(x) = 54x - 50$
e $p(x) = 16 - (3x - 4)^2 = 16 - (9x^2 - 24x + 16) = 16 - 9x^2 + 24x - 16 = -9x^2 + 24x$
geeft $p'(x) = -18x + 24$
f $q(x) = 5x + x(3 - x) = 5x + 3x - x^2 = -x^2 + 8x$
geeft $q'(x) = -2x + 8$

© Noordhoff Uitgevers bv

32 a *

b Je kunt nagaan dat de grafiek van f' door het punt (1, 1) gaat.
$f'(1) = 1$ geeft $1 = a \cdot 1^2$, dus $a = 1$.

Bladzijde 131

33 a $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x$ geeft $f'(x) = 20x^3 - 9x^2 + 2$

b $g(x) = -2x^7 - 3x^5 + 3{,}4$ geeft $g'(x) = -14x^6 - 15x^4$

c $h(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 6\frac{1}{2}x^2 - 12$ geeft $h'(x) = -x^2 + 13x$

d $k(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$ geeft $k'(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

Bladzijde 132

34 a $f(x) = 3(2x+1)^2 = 3(4x^2+4x+1) = 12x^2 + 12x + 3$ geeft $f'(x) = 24x + 12$

b $g(x) = 7(3x-2)(x^2+2x) = 7(3x^3 + 6x^2 - 2x^2 - 4x) = 7(3x^3 + 4x^2 - 4x) = 21x^3 + 28x^2 - 28x$
geeft $g'(x) = 63x^2 + 56x - 28$

c $h(x) = 3px^8 - px^4$ geeft $h'(x) = 24px^7 - 4px^3$

d $k(x) = x^3 + a$ geeft $k'(x) = 3x^2$

35 a $W(q) = -0{,}02q^2 + 8q - 5$ geeft $W'(q) = -0{,}04q + 8$

b $N(t) = 5t^3 + 8t^2 - t$ geeft $N'(t) = 15t^2 + 16t - 1$

c $R(q) = 5q(q-70)^2 = 5q(q^2 - 140q + 4900) = 5q^3 - 700q^2 + 24\,500q$
geeft $R'(q) = 15q^2 - 1400q + 24\,500$

d $L(a) = -0{,}006a^4 + 0{,}2a^3(a-5) - 8 = -0{,}006a^4 + 0{,}2a^4 - a^3 - 8 = 0{,}194a^4 - a^3 - 8$
geeft $L'(a) = 0{,}776a^3 - 3a^2$

36 a $f(x) = (3x-1)(x^2+5x) = 3x^3 + 15x^2 - x^2 - 5x = 3x^3 + 14x^2 - 5x$
geeft $f'(x) = 9x^2 + 28x - 5$

b $g(x) = x^5(x^3 - 4x) - 2x = x^8 - 4x^6 - 2x$ geeft $g'(x) = 8x^7 - 24x^5 - 2$

c $N(t) = (3t^3 - 1)^2 = 9t^6 - 6t^3 + 1$ geeft $N'(t) = 54t^5 - 18t^2$

d $F(a) = 0{,}16a^2(Q - 3a) = 0{,}16Qa^2 - 0{,}48a^3$ geeft $F'(a) = 0{,}32Qa - 1{,}44a^2$

10.3 Raaklijnen en extreme waarden

Bladzijde 134

37 a $f(x) = -x^2 + 4x$ geeft $f'(x) = -2x + 4$

b $y_A = f(3) = 3$
helling $= f'(3) = -2 \cdot 3 + 4 = -2$

c helling $= f'(2) = -2 \cdot 2 + 4 = 0$
Het punt B is de top van de grafiek van f.

Bladzijde 135

38 a $g(x) = 2x^2 + 3x$ geeft $g'(x) = 4x + 3$
Stel k: $y = ax + b$ met $a = g'(3) = 4 \cdot 3 + 3 = 15$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 15x + b \\ y_A = g(3) = 27, \text{ dus } A(3, 27) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 15 \cdot 3 + b = 27 \\ 45 + b = 27 \\ b = -18 \end{array}$$

Dus k: $y = 15x - 18$.

b Stel l: $y = ax + b$ met $a = g'(1) = 4 \cdot 1 + 3 = 7$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 7x + b \\ y_B = g(1) = 5, \text{ dus } B(1, 5) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 7 \cdot 1 + b = 5 \\ 7 + b = 5 \\ b = -2 \end{array}$$

Dus l: $y = 7x - 2$.

39 a $h(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$ geeft $h'(x) = 3x^2 - 4x + 1$
Stel k: $y = ax + b$ met $a = h'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot -2 + 1 = 21$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 21x + b \\ y_A = h(-2) = -15, \text{ dus } A(-2, -15) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 21 \cdot -2 + b = -15 \\ -42 + b = -15 \\ b = 27 \end{array}$$

Dus k: $y = 21x + 27$.

10

© Noordhoff Uitgevers bv

b Stel l: $y = ax + b$ met $a = h'(0) = 3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 1 = 1$.
l: $y = x + b$
$y_B = h(0) = 3$, dus $B(0, 3)$
Dus l: $y = x + 3$.

40 Los op $-x^2 + 6x = 0$
$x(-x + 6) = 0$
$x = 0 \vee x = 6$
Dus $P(6, 0)$.
$f(x) = -x^2 + 6x$ geeft $f'(x) = -2x + 6$.
Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(6) = -2 \cdot 6 + 6 = -6$.
$\left.\begin{array}{l} y = -6x + b \\ P(6, 0) \end{array}\right\}$ $-6 \cdot 6 + b = 0$
$-36 + b = 0$
$b = 36$
Dus k: $y = -6x + 36$.

41 **a** $f(x) = 5(x^2 - 3)(2x - 4) = 5(2x^3 - 4x^2 - 6x + 12) = 10x^3 - 20x^2 - 30x + 60$ geeft $f'(x) = 30x^2 - 40x - 30$
snelheid $= f'(3) = 30 \cdot 3^2 - 40 \cdot 3 - 30 = 120$
b Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(1) = 30 \cdot 1^2 - 40 \cdot 1 - 30 = -40$.
$\left.\begin{array}{l} y = -40x + b \\ y_A = f(1) = 20\text{, dus } A(1, 20) \end{array}\right\}$ $-40 \cdot 1 + b = 20$
$-40 + b = 20$
$b = 60$
Dus k: $y = -40x + 60$.
c Stel m: $y = ax + b$ met $a = f'(0) = 30 \cdot 0^2 - 40 \cdot 0 - 30 = -30$.
m: $y = -30x + b$
$y_P = f(0) = 60$, dus $P(0, 60)$
Dus m: $y = -30x + 60$.

42 **a** $f(x) = ax^1$ geeft $f'(x) = 1 \cdot ax^0 = 1 \cdot a \cdot 1 = a$
$g(x) = c = cx^0$ geeft $g'(x) = 0 \cdot cx^{-1} = 0$
b Zij moet stoppen na $f'(x) = 3x^2 + 10x$, want dan heb je de afgeleide al.
c Hij moet opschrijven $f(x) = x^4 - 3x$ geeft $f'(x) = 4x^3 - 3$.
Er geldt: niet $f(x) = f'(x)$ voor elke x.

Bladzijde 136

43 **a** $f(x) = 5x^2 + 3a^4$ geeft $f'(x) = 10x + 0 = 10x$
b $f(x) = 5x^2 + 3a^4$ geeft $f'(a) = 0 + 12a^3 = 12a^3$
c Het is niet duidelijk wat de variabele is.

10

44 **a** $y = 7x^4 - a^3$ geeft $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 28x^3$
b $y = 7x^4 - a^3$ geeft $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}a} = -3a^2$
c $R = q^3 - 5pq$ geeft $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}q} = 3q^2 - 5p$
d $R = q^3 - 5pq$ geeft $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p} = -5q$
e $B = a^3 - 3t^2$ geeft $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = -6t$
f $B = a^3 - 3t^2$ geeft $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}a} = 3a^2$

45 $R = 5a^2 - 3ab^3 - 5abc + 5a - 3$ geeft
$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}a} = 10a - 3b^3 - 5bc + 5$
$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}b} = 0 - 9ab^2 - 5ac + 0 = -9ab^2 - 5ac$
$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}c} = 0 - 0 - 5ab + 0 = -5ab$

Bladzijde 137

46 **a** $W = -0{,}1q^3 + 12q^2 - 210q + 500$ geeft $\frac{dW}{dq} = -0{,}3q^2 + 24q - 210$

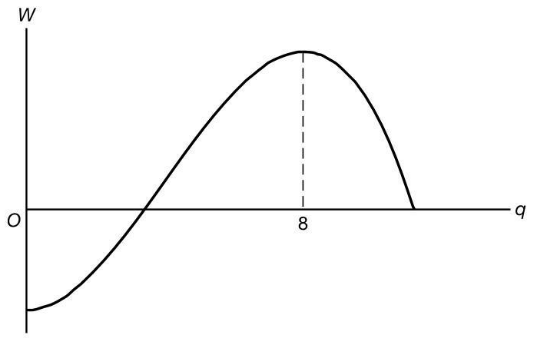
b $\left[\frac{dW}{dq}\right]_{q=70} = -0{,}3 \cdot 70^2 + 24 \cdot 70 - 210 = -1470 + 1680 - 210 = 0$

Het punt op de grafiek dat bij $q = 70$ hoort is een top van de grafiek.

Bladzijde 138

47 $W = -0{,}04q^3 + 0{,}48q^2 - 4$ geeft $\frac{dW}{dq} = -0{,}12q^2 + 0{,}96q$

$\frac{dW}{dq} = 0$ geeft $-0{,}12q^2 + 0{,}96q = 0$
$q(-0{,}12q + 0{,}96) = 0$
$q = 0 \vee -0{,}12q + 0{,}96 = 0$
$q = 0 \vee -0{,}12q = -0{,}96$
$q = 0 \vee q = 8$

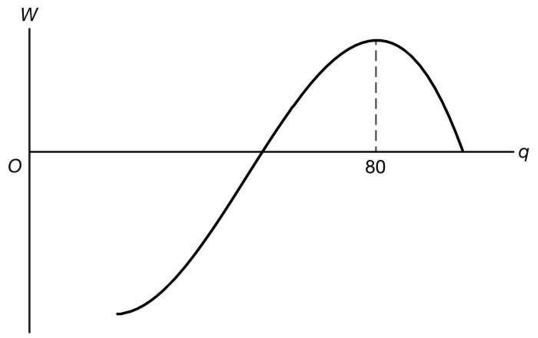


W is maximaal voor $q = 8$.
$W_{max} = -0{,}04 \cdot 8^3 + 0{,}48 \cdot 8^2 - 4 = 6{,}24$
De maximale winst is 6240 euro per maand.

Bladzijde 139

48 **a** $W = -0{,}01q^3 + 1{,}5q^2 - 48q - 200$ geeft $\frac{dW}{dq} = -0{,}03q^2 + 3q - 48$

$\left[\frac{dW}{dq}\right]_{q=80} = -0{,}03 \cdot 80^2 + 3 \cdot 80 - 48 = -192 + 240 - 48 = 0$



Uit de schets volgt dat je bij $q = 80$ met een maximum te maken hebt, dus de winst is maximaal bij een maandelijkse productie van 80 000 stuks.

b $W_{max} = -0{,}01 \cdot 80^3 + 1{,}5 \cdot 80^2 - 48 \cdot 80 - 200 = 440$
De maximale winst is 440 000 euro per maand.

49 **a** De derde week is van $t = 2$ tot $t = 3$.
$t = 2$ geeft $N = 152$ en $t = 3$ geeft $N = 219$.
De toename is $\frac{219 - 152}{152} \times 100\% \approx 44{,}1\%$.

b $N = -2t^3 + 9t^2 + 60t + 12$ geeft $\frac{dN}{dt} = -6t^2 + 18t + 60$

$\left[\frac{dN}{dt}\right]_{t=3} = -6 \cdot 3^2 + 18 \cdot 3 + 60 = 60$

$\left[\frac{dN}{dt}\right]_{t=3} > 0$, dus op $t = 3$ neemt het aantal bacteriën toe.

10

© Noordhoff Uitgevers bv

c $\left[\frac{dN}{dt}\right]_{t=7} = -6 \cdot 7^2 + 18 \cdot 7 + 60 = -108$

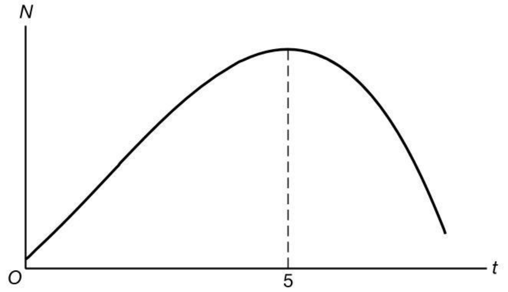
$\left[\frac{dN}{dt}\right]_{t=7} < 0$, dus op $t = 7$ neemt het aantal bacteriën af.

d $\frac{dN}{dt} = 0$ geeft $-6t^2 + 18t + 60 = 0$

$t^2 - 3t - 10 = 0$

$(t + 2)(t - 5) = 0$

$t = -2 \vee t = 5$



N is maximaal voor $t = 5$.

$N_{max} = -2 \cdot 5^3 + 9 \cdot 5^2 + 60 \cdot 5 + 12 = 287$

Er zijn maximaal 287 miljoen bacteriën.

50 **a** $p = 20$ geeft $N = 500t^2 - 50t^3$

$N = 500t^2 - 50t^3$ geeft $\frac{dN}{dt} = 1000t - 150t^2$

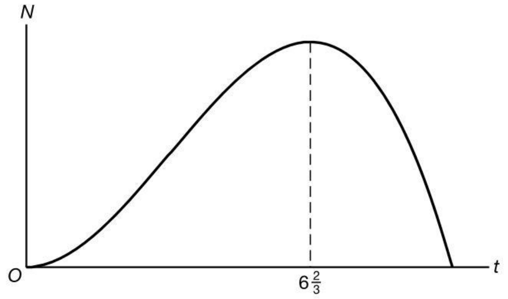
$\frac{dN}{dt} = 0$ geeft $1000t - 150t^2 = 0$

$t(1000 - 150t) = 0$

$t = 0 \vee 1000 - 150t = 0$

$t = 0 \vee -150t = -1000$

$t = 0 \vee t = 6\frac{2}{3}$



N is maximaal voor $t = 6\frac{2}{3}$.

$N_{max} = 500 \cdot \left(6\frac{2}{3}\right)^2 - 50 \cdot \left(6\frac{2}{3}\right)^3 \approx 7407$

Er zijn maximaal 7407 bezoekers.

b $N = 25pt^2 - 50t^3$ geeft $\frac{dN}{dt} = 50pt - 150t^2$

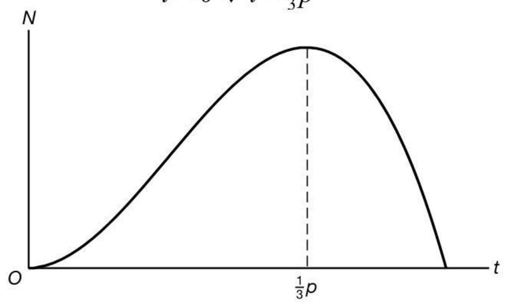
$\frac{dN}{dt} = 0$ geeft $50pt - 150t^2 = 0$

$t(50p - 150t) = 0$

$t = 0 \vee 50p - 150t = 0$

$t = 0 \vee -150t = -50p$

$t = 0 \vee t = \frac{1}{3}p$



Bij $t = \frac{1}{3}p$ heb je met een maximum te maken.

© Noordhoff Uitgevers bv

c $N_{max} = 25p \cdot \left(\frac{1}{3}p\right)^2 - 50 \cdot \left(\frac{1}{3}p\right)^3 = 25p \cdot \frac{1}{9}p^2 - 50 \cdot \frac{1}{27}p^3 = \frac{25}{9}p^3 - \frac{50}{27}p^3 = \frac{25}{27}p^3$

d $N = 0$ geeft $25pt^2 - 50t^3 = 0$

$t^2(25p - 50t) = 0$

$t^2 = 0 \vee 25p - 50t = 0$

$t = 0 \vee -50t = -25p$

$t = 0 \vee t = \frac{1}{2}p$

Dus $\frac{1}{2}p$ uur na $t = 0$ (dat is om 9:00 uur) verlaat de laatste bezoeker de dierentuin.

Bladzijde 140

51 **a** $v = 20(2{,}1 - d)d^2 = 20d^2(2{,}1 - d) = 42d^2 - 20d^3$ geeft $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}d} = 84d - 60d^2$

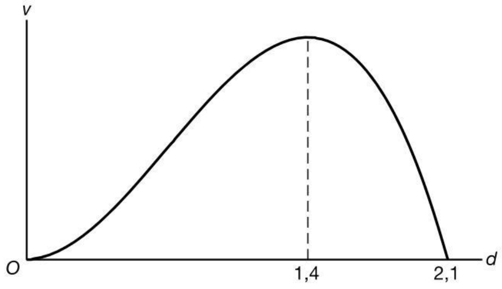
$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}d} = 0$ geeft $84d - 60d^2 = 0$

$d(84 - 60d) = 0$

$d = 0 \vee 84 - 60d = 0$

$d = 0 \vee -60d = -84$

$d = 0 \vee d = 1{,}4$



v is maximaal voor $d = 1{,}4$.

$v_{max} = 42 \cdot 1{,}4^2 - 20 \cdot 1{,}4^3 = 27{,}44$

De maximale snelheid is 27,44 m/s = 27,44 · 3,6 ≈ 99 km/uur.

b $v = k(D - d)d^2 = kd^2(D - d) = kDd^2 - kd^3$ geeft $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}d} = 2kDd - 3kd^2$

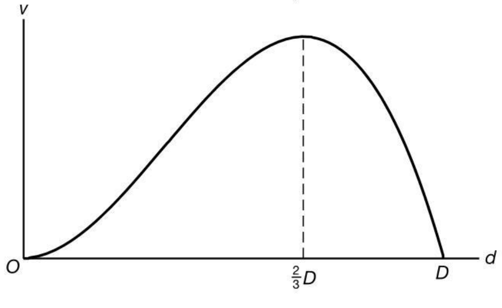
$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}d} = 0$ geeft $2kDd - 3kd^2 = 0$

$kd(2D - 3d) = 0$

$kd = 0 \vee 2D - 3d = 0$

$d = 0 \vee -3d = -2D$

$d = 0 \vee d = \frac{2}{3}D$



c $v_{max} = kD \cdot \left(\frac{2}{3}D\right)^2 - k \cdot \left(\frac{2}{3}D\right)^2 = kD \cdot \frac{4}{9}D^2 - k \cdot \frac{8}{27}D^3 = \frac{4}{9}kD^3 - \frac{8}{27}kD^3 = \frac{4}{27}kD^3$

d Neem bijvoorbeeld $D = 2{,}5$.

$k = 20$ en $D = 2{,}5$ geeft $v_{max} = \frac{4}{27} \cdot 20 \cdot 2{,}5^3 = 46{,}3$ m/s en dat is 46,3 · 3,6 ≈ 167 km/uur.

Dus 170 km/uur zou wel kunnen.

52 **a** $M = 90$ geeft $V = 0{,}0015d^2\left(\frac{1}{3} \cdot 90 - \frac{1}{2}d\right) = 0{,}0015d^2\left(30 - \frac{1}{2}d\right) = 0{,}045d^2 - 0{,}000\,75d^3$

$V = 0{,}045d^2 - 0{,}000\,75d^3$ geeft $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}d} = 0{,}09d - 0{,}002\,25d^2$

$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}d} = 0$ geeft $0{,}09d - 0{,}002\,25d^2 = 0$

$d(0{,}09 - 0{,}002\,25d) = 0$

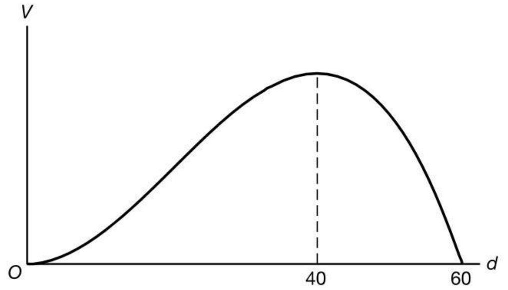
$d = 0 \vee 0{,}09 - 0{,}002\,25d = 0$

$d = 0 \vee -0{,}002\,25d = -0{,}09$

$d = 0 \vee d = 40$

10

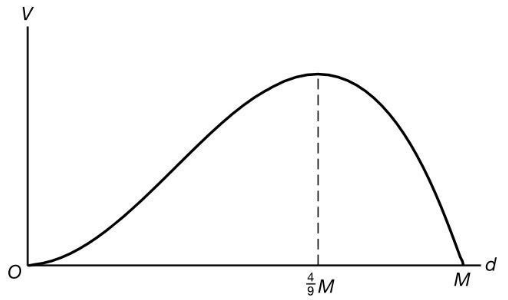
© Noordhoff Uitgevers bv



De verlaging V is maximaal voor $d = 40$.
De maximale verlaging is $V_{max} = 0{,}045 \cdot 40^2 - 0{,}000\,75 \cdot 40^3 = 24$ mmHg.

b $V = 0{,}0015d^2\left(\frac{1}{3}M - \frac{1}{2}d\right) = 0{,}0005Md^2 - 0{,}000\,75d^3$ geeft $\frac{dV}{dd} = 0{,}001Md - 0{,}002\,25d^2$

$\frac{dV}{dd} = 0$ geeft $0{,}001Md - 0{,}002\,25d^2 = 0$
$d(0{,}001M - 0{,}002\,25d) = 0$
$d = 0 \vee 0{,}001M - 0{,}002\,25d = 0$
$d = 0 \vee -0{,}002\,25d = -0{,}001M$
$d = 0 \vee d = \frac{4}{9}M$



Bij $d = \frac{4}{9}M$ heb je met een maximum te maken.

c $d = \frac{4}{9}M$ geeft
$V_{max} = 0{,}0005M \cdot \left(\frac{4}{9}M\right)^2 - 0{,}000\,75 \cdot \left(\frac{4}{9}M\right)^3 = 0{,}0005M \cdot \frac{16}{81}M^2 - 0{,}000\,75 \cdot \frac{64}{729}M^3 \approx 0{,}000\,033M^3$
Dus $a = 0{,}000\,033$.

10.4 De afgeleide van $y = ax^n$

Bladzijde 142

53
a $\frac{10}{x^3} = 10x^{-3}$
b $8 \cdot \sqrt[3]{x} = 8x^{\frac{1}{3}}$
c $\frac{2}{x} = 2x^{-1}$
d $\frac{7}{\sqrt{x}} = 7x^{-\frac{1}{2}}$
e $4x\sqrt{x} = 4x^{1\frac{1}{2}}$
f $\frac{3}{4x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{3}{4x^{2\frac{1}{2}}} = \frac{3}{4}x^{-2\frac{1}{2}}$

10

Bladzijde 143

54
a $f(x) = \frac{6}{x^3} + 6x^3 = 6x^{-3} + 6x^3$ geeft $f'(x) = -18x^{-4} + 18x^2 = -\frac{18}{x^4} + 18x^2$
b $g(x) = 3x^6 - \frac{4}{x} = 3x^6 - 4x^{-1}$ geeft $g'(x) = 18x^5 + 4x^{-2} = 18x^5 + \frac{4}{x^2}$
c $m(t) = 12t \cdot \sqrt[4]{t} = 12t^{1\frac{1}{4}}$ geeft $m'(t) = 15 \cdot t^{\frac{1}{4}} = 15 \cdot \sqrt[4]{t}$
d $l(p) = \frac{2}{p} + \frac{1}{2p^2} = 2p^{-1} + \frac{1}{2}p^{-2}$ geeft $l'(p) = -2p^{-2} - p^{-3} = -\frac{2}{p^2} - \frac{1}{p^3}$
e $h(x) = 3x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} = 3x^{1\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}$ geeft $h'(x) = 4\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = 4\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$
f $k(q) = \frac{1}{q} = q^{-1}$ geeft $k'(q) = -q^{-2} = -\frac{1}{q^2}$

55
a $y = x + \frac{4}{\sqrt{x}} = x + 4x^{-\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 1 - 2x^{-1\frac{1}{2}} = 1 - \frac{2}{x\sqrt{x}}$
b $y = 3x^2 \cdot \sqrt{x} = 3x^{2\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 7\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} = 7\frac{1}{2}x\sqrt{x}$
c $y = 3x - x^{-1{,}65}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 3 + 1{,}65x^{-2{,}65}$

d $y = 10x^{1,72} + \dfrac{6}{x^{1,35}} = 10x^{1,72} + 6x^{-1,35}$ geeft $\dfrac{dy}{dx} = 17{,}2x^{0,72} - 8{,}1x^{-2,35} = 17{,}2x^{0,72} - \dfrac{8{,}1}{x^{2,35}}$

e $y = \dfrac{2}{5x} + \dfrac{5x}{2} = \frac{2}{5}x^{-1} + 2\frac{1}{2}x$ geeft $\dfrac{dy}{dx} = -\frac{2}{5}x^{-2} + 2\frac{1}{2} = -\dfrac{2}{5x^2} + 2\frac{1}{2}$

f $y = (1 + x)\sqrt{x} = \sqrt{x} + x\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} + x^{1\frac{1}{2}}$ geeft $\dfrac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 1\frac{1}{2}\sqrt{x}$

56 **a** $y_A = \dfrac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$y = \dfrac{2}{x} = 2x^{-1}$ geeft $\dfrac{dy}{dx} = -2x^{-2} = -\dfrac{2}{x^2}$

helling $= -\dfrac{2}{4^2} = -\dfrac{2}{16} = -\frac{1}{8}$

b helling $= -\dfrac{2}{1^2} = -2$

c snelheid $= -\dfrac{2}{5^2} = -\dfrac{2}{25}$

d Voor elke $x > 0$ is $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2}{x^2}$ kleiner dan nul, dus de grafiek van y is dalend.

Bladzijde 144

57 **a** $y = \dfrac{2}{x} + 2x = 2x^{-1} + 2x$ geeft $\dfrac{dy}{dx} = -2x^{-2} + 2 = -\dfrac{2}{x^2} + 2$

snelheid $= -\dfrac{2}{4^2} + 2 = -\dfrac{2}{16} + 2 = -\frac{1}{8} + 2 = 1\frac{7}{8}$

b helling $= -\dfrac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + 2 = -\dfrac{2}{\left(\frac{1}{4}\right)} + 2 = -8 + 2 = -6 < 0$

c helling $-\dfrac{2}{1^2} + 2 = -\dfrac{2}{1} + 2 = -2 + 2 = 0$, dus de raaklijn is horizontaal.

58 **a** $f(4) = 10\sqrt{4} - 5 \cdot 4 = 10 \cdot 2 - 20 = 20 - 20 = 0$
Dus $x_A = 4$.
$f(x) = 10\sqrt{x} - 5x = 10x^{\frac{1}{2}} - 5x$ geeft $f'(x) = 5x^{-\frac{1}{2}} - 5 = \dfrac{5}{\sqrt{x}} - 5$
helling $= f'(4) = \dfrac{5}{\sqrt{4}} - 5 = \dfrac{5}{2} - 5 = -2\frac{1}{2}$

b snelheid $= f'\left(\frac{1}{4}\right) = \dfrac{5}{\sqrt{\frac{1}{4}}} - 5 = \dfrac{5}{\left(\frac{1}{2}\right)} - 5 = 10 - 5 = 5$

c helling $= f'(1) = \dfrac{5}{\sqrt{1}} - 5 = 5 - 5 = 0$, dus de raaklijn is horizontaal.

10

Bladzijde 145

59 **a** $y = x^2 + \dfrac{16}{x} - 9 = x^2 + 16x^{-1} - 9$ geeft $\dfrac{dy}{dx} = 2x - 16x^{-2} = 2x - \dfrac{16}{x^2}$

b $\dfrac{dy}{dx} = 0$ geeft $2x - \dfrac{16}{x^2} = 0$

$2x = \dfrac{16}{x^2}$

$2x^3 = 16$

$x^3 = 8$

$x = \sqrt[3]{8} = 2$

Uit de grafiek volgt dat y minimaal is voor $x = 2$.

$y_{min} = 2^2 + \dfrac{16}{2} - 9 = 3$

c Stel k: $y = ax + b$ met $a = \left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=1} = 2 \cdot 1 - \dfrac{16}{1^2} = -14$.

$\left.\begin{array}{l} y = -14x + b \\ y_A = 8, \text{ dus } A(1, 8) \end{array}\right\} -14 \cdot 1 + b = 8$, dus $b = 22$
Dus k: $y = -14x + 22$.

d $\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=-3} = 2 \cdot -3 - \dfrac{16}{(-3)^2} \approx -7{,}78 < 0$, dus y neemt af voor $x = -3$.

© Noordhoff Uitgevers bv

60 **a** $f(x) = x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$ geeft $f'(x) = 1 - x^{-2} = 1 - \frac{1}{x^2}$

$f'(x) = 0$ geeft $1 - \frac{1}{x^2} = 0$

$1 = \frac{1}{x^2}$

$x^2 = 1$

$x = 1 \vee x = -1$

Uit de grafiek volgt

- het maximum van f is $f(-1) = -2$
- het minimum van f is $f(1) = 2$.

b Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(4) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

$y = \frac{15}{16}x + b$

$y_A = f(4) = 4 + \frac{1}{4} = 4\frac{1}{4}$, dus $A\left(4, 4\frac{1}{4}\right)$ $\Big\}$ $\frac{15}{16} \cdot 4 + b = 4\frac{1}{4}$

$\frac{15}{4} + b = 4\frac{1}{4}$

$b = \frac{1}{2}$

Dus k: $y = \frac{15}{16}x + \frac{1}{2}$.

c snelheid $= f'(0{,}5) = 1 - \frac{1}{0{,}25} = 1 - 4 = -3$

d helling $= f'(0{,}2) = 1 - \frac{1}{0{,}2^2} = 1 - \frac{1}{0{,}04} = -24 < 0$, dus $f(x)$ neemt af voor $x = 0{,}2$.

e Bij $f(x) = x + \frac{1}{x}$ zijn de toppen $(-1, -2)$ en $(1, 2)$.

Er geldt $y = x + \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{translatie } (0,\, a)} y = x + \frac{1}{x} + a$, dus toppen op de x-as voor $a = 2$ en $a = -2$.

61 **a** $y = 8 - \frac{16}{x} + \frac{24}{x^2} = 8 - 16x^{-1} + 24x^{-2}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 16x^{-2} - 48x^{-3} = \frac{16}{x^2} - \frac{48}{x^3}$

$\frac{dy}{dx} = 0$ geeft $\frac{16}{x^2} - \frac{48}{x^3} = 0$

$\frac{16}{x^2} = \frac{48}{x^3}$

$16x^3 = 48x^2$

$16x = 48$

$x = 3$

$x = 3$ geeft $y = 8 - \frac{16}{3} + \frac{24}{9} = 5\frac{1}{3}$, dus $A\left(3, 5\frac{1}{3}\right)$.

b snelheid $= \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=-2} = \frac{16}{4} - \frac{48}{-8} = 4 + 6 = 10$

c Voer in $y_1 = \frac{16}{x^2} - \frac{48}{x^3}$.

De optie maximum geeft $x = 4{,}5$ en $y = 0{,}26$.

$x_B = 4{,}5$ geeft $y_B = 8 - \frac{16}{4{,}5} + \frac{24}{4{,}5^2} \approx 5{,}63$, dus $B(4{,}5; 5{,}63)$.

Bladzijde 147

62 **a** $5x^{1,8} = 81x^{0,2}$

$5x^{1,8-0,2} = 81$

$x^{1,6} = 16{,}2$

$x = 16{,}2^{\frac{1}{1,6}} \approx 5{,}70$

b $1{,}8x^{1,3} - 0{,}9x^{3,7} = 0$

$1{,}8x^{1,3} = 0{,}9x^{3,7}$

$1{,}8x^{1,3-3,7} = 0{,}9$

$x^{-2,4} = 0{,}5$

$x = 0{,}5^{\frac{1}{-2,4}} \approx 1{,}33$

c $7x^{1,98} - 12x = 0$

$7x^{1,98} = 12x$

$7x^{1,98-1} = 12$

$x^{0,98} = \frac{12}{7}$

$x = \left(\frac{12}{7}\right)^{\frac{1}{0,98}} \approx 1{,}73$

d $7x = 31x^{-1,29}$

$7x^{1+1,29} = 31$

$x^{2,29} = \frac{31}{7}$

$x = \left(\frac{31}{7}\right)^{\frac{1}{2,29}} \approx 1{,}92$

10

63 **a** $x_A = 4$ geeft $y_A = 12 \cdot 4^{0,3} - 3 \cdot 4^{1,12} \approx 4{,}02$

$y = 12x^{0,3} - 3x^{1,12}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 3{,}6x^{-0,7} - 3{,}36x^{0,12}$

helling $= \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=4} = 3{,}6 \cdot 4^{-0.7} - 3{,}36 \cdot 4^{0,12} \approx -2{,}60$

b snelheid $= \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0,3} = 3{,}6 \cdot 0{,}3^{-0,7} - 3{,}36 \cdot 0{,}3^{0,12} \approx 5{,}45$

c $\frac{dy}{dx} = 0$ geeft $3{,}6x^{-0,7} - 3{,}36x^{0,12} = 0$

$3{,}6x^{-0,7} = 3{,}36x^{0,12}$

$3{,}6x^{-0,7\,-\,0,12} = 3{,}36$

$x^{-0,82} = \frac{3{,}36}{3{,}6}$

$x = \left(\frac{3{,}36}{3{,}6}\right)^{\frac{1}{-0,82}} \approx 1{,}09$

Dus y is maximaal voor $x = 1{,}09$.

64 **a** $R = 4q^{0,41} - q^{0,83}$ geeft $\frac{dR}{dq} = 1{,}64q^{-0,59} - 0{,}83q^{-0,17}$

snelheid $= \left[\frac{dR}{dq}\right]_{q=0,5} = 1{,}64 \cdot 0{,}5^{-0,59} - 0{,}83 \cdot 0{,}5^{-0,17} \approx 1{,}53$ euro per stuk

b 8500 stuks, dus $q = 8{,}5$

snelheid $= \left[\frac{dR}{dq}\right]_{q=8,5} = 1{,}64 \cdot 8{,}5^{-0,59} - 0{,}83 \cdot 8{,}5^{-0,17} \approx -0{,}11$

De opbrengt neemt af met 0,11 euro per stuk.

c $\frac{dR}{dq} = 0$ geeft $1{,}64q^{-0,59} - 0{,}83q^{-0,17} = 0$

$1{,}64q^{-0,59} = 0{,}83q^{-0,17}$

$1{,}64q^{-0,59\,+\,0,17} = 0{,}83$

$q^{-0,42} = \frac{0{,}83}{1{,}64}$

$q = \left(\frac{0{,}83}{1{,}64}\right)^{\frac{1}{-0,42}} \approx 5{,}06$

$R_{max} = 4 \cdot 5{,}06^{0,41} - 5{,}06^{0,83} \approx 3{,}935$

De maximale opbrengst is 3935 euro.

10

65 **a** $B = 4\sqrt{t} - t = 4t^{0,5} - 1$ geeft $\frac{dB}{dt} = 2t^{-0,5} - 1 = \frac{2}{\sqrt{t}} - 1$

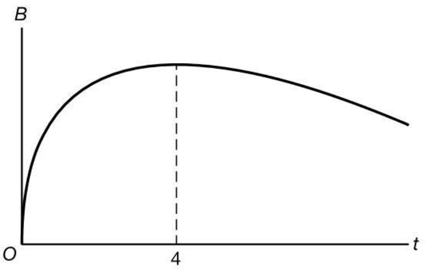
De snelheid is $\left[\frac{dB}{dt}\right]_{t=3} = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \approx 0{,}15$ dm²/maand = 15 cm²/maand.

b $\frac{dB}{dt} = 0$ geeft $\frac{2}{\sqrt{t}} - 1 = 0$

$\frac{2}{\sqrt{t}} = 1$

$\sqrt{t} = 2$

$t = 4$



Uit de schets volgt dat B maximaal is voor $t = 4$.

$B_{max} = 4\sqrt{4} - 4 = 4$ dm²

© Noordhoff Uitgevers bv

c $B = a\sqrt{t} - t = at^{0,5} - t$ geeft $\frac{dB}{dt} = 0,5at^{-0,5} - 1 = \frac{a}{2\sqrt{t}} - 1$

$\frac{dB}{dt} = 0$ geeft $\frac{a}{2\sqrt{t}} - 1 = 0$

$\frac{a}{2\sqrt{t}} = 1$

$2\sqrt{t} = a$

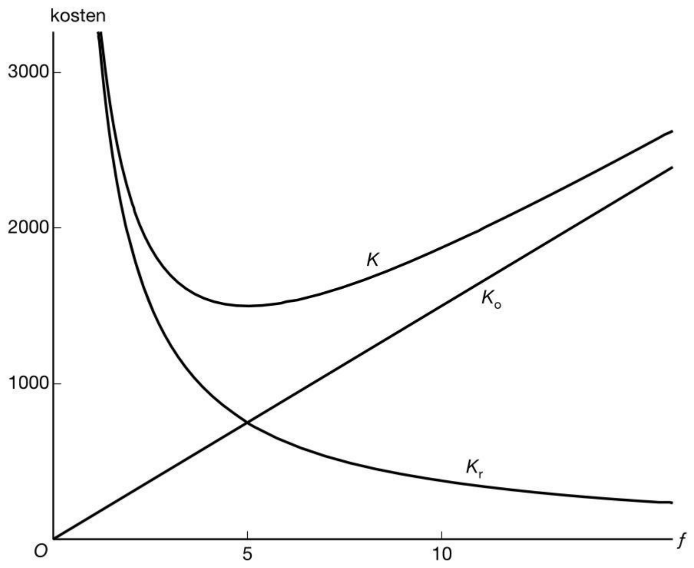
$\sqrt{t} = \frac{1}{2}a$, dus $t = \frac{1}{4}a^2$

De bladoppervlakte is maximaal als $t = \frac{1}{4}a^2$.

$B_{max} = a \cdot \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2$

Bladzijde 148

66 **a**



b De beweringen II en III zijn waar.
I is niet waar, want na een minimum stijgen de kosten K weer.
II is waar, want de grafiek van K_r is dalend.
III is waar, er is een minimum bij (ongeveer) $f = 5$.

c $K = 150f + \frac{3750}{f} = 150f + 3750f^{-1}$ geeft $\frac{dK}{df} = 150 - 3750f^{-2} = 150 - \frac{3750}{f^2}$

$\frac{dK}{df} = 0$ geeft $150 - \frac{3750}{f^2} = 0$

$150 = \frac{3750}{f^2}$

$150f^2 = 3750$

$f^2 = 25$

$f = 5$

Bij een onderhoudsfrequentie van vijf keer per jaar zijn de totale kosten minimaal.

d Bij één onderhoudsbeurt per jaar zijn de totale kosten 150 + 3750 = 3900 euro per jaar per machine, dus bij 50 machines in vier jaar zijn de kosten $50 \cdot 4 \cdot 3900 = 780\,000$ euro.

Bij vijf onderhoudsbeurten per jaar zijn de totale kosten $150 \cdot 5 + \frac{3750}{5} = 1500$ euro per jaar per machine, dus bij 50 machines in vier jaar zijn de kosten $50 \cdot 4 \cdot 1500 = 300\,000$ euro.

Het voordeel is 780 000 − 300 000 = 480 000 euro.

Bladzijde 149

67 **a** $q = 6t^{1,32} - t^{1,82}$ geeft $\frac{dq}{dt} = 7,92t^{0,32} - 1,82t^{0,82}$

Bij 1 juni hoort $t = 31$.

snelheid $= \left[\frac{dq}{dt}\right]_{t=31} = 7,92 \cdot 31^{0,32} - 1,82 \cdot 31^{0,82} \approx -6,642$

De verkoop neemt af met 6642 artikelen per dag.

b Bij 16 mei hoort $t = 15$ en bij 28 mei hoort $t = 27$.

$t = 15$ geeft $\frac{75,895 - 62,312}{75,895} \times 100\% \approx 17,9\%$.

© Noordhoff Uitgevers bv

c $t = 35$ geeft $q \approx 9{,}163$, $t = 36$ geeft $q = 0$ en $t = 37$ geeft $q \approx -9{,}724$
Dus de artikelen zijn 35 dagen lang verkocht.

d $\frac{dq}{dt} = 0$ geeft $7{,}92t^{0,32} - 1{,}82t^{0,82} = 0$

$$7{,}92t^{0,32} = 1{,}82t^{0,82}$$
$$7{,}92t^{0,32-0,82} = 1{,}82$$
$$t^{-0,5} = \frac{1{,}82}{7{,}92}$$
$$t = \left(\frac{1{,}82}{7{,}92}\right)^{\frac{1}{-0,5}} \approx 18{,}9$$

Bij $t = 18{,}9$ hoort 20 mei, dus op 20 mei zijn de meeste artikelen verkocht.

68 **a** $S\left(\frac{5}{12}\right) = 0{,}4 + \frac{3}{\left(\frac{5}{12}\right)^{1,12}} + 0{,}0002 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^{4,2} \approx 8{,}4$

Dus ongeveer 8 storingen per maand.

b Voer in $y_1 = 0{,}4 + \frac{3}{x^{1,12}} + 0{,}0002x^{4,2}$ en $y_2 = 8$.
Intersect geeft $x \approx 12{,}244$.
Dus 12 jaar en $0{,}244 \cdot 12 \approx 3$ maanden.

c $S(t) = 0{,}4 + \frac{3}{t^{1,12}} + 0{,}0002t^{4,2} = 0{,}4 + 3t^{-1,12} + 0{,}0002t^{4,2}$ geeft

$S'(t) = -3{,}36t^{-2,12} + 0{,}00084t^{3,2} = -\frac{3{,}36}{t^{2,12}} + 0{,}00084t^{3,2}$

$S'(11) = -\frac{3{,}36}{11^{2,12}} + 0{,}00084 \cdot 11^{3,2} \approx 1{,}8$

Het aantal storingen neemt met 1,8 per maand toe.

d $S'(t) = 0$ geeft $-3{,}36t^{-2,12} + 0{,}00084t^{3,2} = 0$

$$0{,}00084t^{3,2} = 3{,}36t^{-2,12}$$
$$0{,}00084t^{3,2+2,12} = 3{,}36$$
$$t^{5,32} = 4000$$
$$t = 4000^{\frac{1}{5,32}} \approx 4{,}754$$

Dus na 4 jaar en $0{,}574 \cdot 12 \approx 9$ maanden is het aantal storingen per maand minimaal.

10.5 Regels voor het differentiëren

Bladzijde 151

69 **a** $p'(x) = 6x^2 + 2x$
b $f'(x) = 2x$, $g'(x) = 2$ en $f'(x) \cdot g'(x) = 2x \cdot 2 = 4x$
c Nee, want $p'(x) = 6x^2 + 2x$ en $f'(x) \cdot g'(x) = 4x$.

Bladzijde 152

70 **a** $f(x) = (2 - 3x^2)(2 + 7x)$ geeft
$f'(x) = [2 - 3x^2]' \cdot (2 + 7x) + (2 - 3x^2) \cdot [2 + 7x]' = -6x \cdot (2 + 7x) + (2 - 3x^2) \cdot 7$
b $g(x) = (2x - 5)^2 = (2x - 5)(2x - 5)$ geeft
$g'(x) = [2x - 5]' \cdot (2x - 5) + (2x - 5) \cdot [2x - 5]' = 2 \cdot (2x - 5) + (2x - 5) \cdot 2$
c $h(x) = (x^2 - 3x)(x^3 + x^2 + x)$ geeft
$h'(x) = [x^2 - 3x]' \cdot (x^3 + x^2 + x) + (x^2 - 3x) \cdot [x^3 + x^2 + x]'$
$= (2x - 3) \cdot (x^3 + x^2 + x) + (x^2 - 3x) \cdot (3x^2 + 2x + 1)$
d $j(x) = (3x^2 - 4)^2 = (3x^2 - 4)(3x^2 - 4)$ geeft
$j'(x) = [3x^2 - 4]' \cdot (3x^2 - 4) + (3x^2 - 4) \cdot [3x^2 - 4]' = 6x \cdot (3x^2 - 4) + (3x^2 - 4) \cdot 6x$

71 **a** Uit $\sqrt{2x} \cdot \sqrt{2x} = 2x$ volgt $\left[\sqrt{2x}\right]' \cdot \sqrt{2x} + \sqrt{2x} \cdot \left[\sqrt{2x}\right]' = 2$

$$2\sqrt{2x} \cdot \left[\sqrt{2x}\right]' = 2$$
$$\left[\sqrt{2x}\right]' = \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

Dus $g(x) = \sqrt{2x}$ geeft $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b Uit $\sqrt{x^2-x}\cdot\sqrt{x^2-x}=x^2-x$ volgt $\left[\sqrt{x^2-x}\right]'\cdot\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2-x}\cdot\left[\sqrt{x^2-x}\right]'=2x-1$

$$2\sqrt{x^2-x}\cdot\left[\sqrt{x^2-x}\right]'=2x-1$$

$$\left[\sqrt{x^2-x}\right]'=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$$

Dus $h(x)=\sqrt{x^2-x}$ geeft $h'(x)=\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$.

72 **a** $t'(x)=3$ en $n'(x)=1$ en $\dfrac{t'(x)}{n'(x)}=\dfrac{3}{1}=3$

b Voer in $y_1=\dfrac{3x+2}{x+2}$, $y_2=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y_1)|_{x=x}$ (met de Casio: $y_2=\mathrm{d/dx}(y_1,x)$) en $y_3=3$.
Je ziet bij het plotten dat de grafiek van y_3 niet dezelfde is als de grafiek van y_2.
Dus $q'(x)\neq\dfrac{t'(x)}{n'(x)}$.

Bladzijde 153

73 **a** $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{(x-4)\cdot 1-(x+1)\cdot 1}{(x-4)^2}=\dfrac{x-4-x-1}{(x-4)^2}=\dfrac{^-5}{(x-4)^2}$

b $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=7+\dfrac{(x+7)\cdot{}^-2-(^-2x+3)\cdot 1}{(x+7)^2}=7+\dfrac{^-2x-14+2x-3}{(x+7)^2}=7-\dfrac{17}{(x+7)^2}$

c $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{(6-x)\cdot 6x-3x^2\cdot{}^-1}{(6-x)^2}+12x^2=\dfrac{36x-6x^2+3x^2}{(6-x)^2}+12x^2=\dfrac{^-3x^2+36x}{(6-x)^2}+12x^2$

d $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{(8x^2-5)\cdot(4+3x^2)-(4x+x^3)\cdot 16x}{(8x^2-5)^2}$

$$=\frac{32x^2+24x^4-20-15x^2-64x^2-16x^4}{(8x^2-5)^2}$$

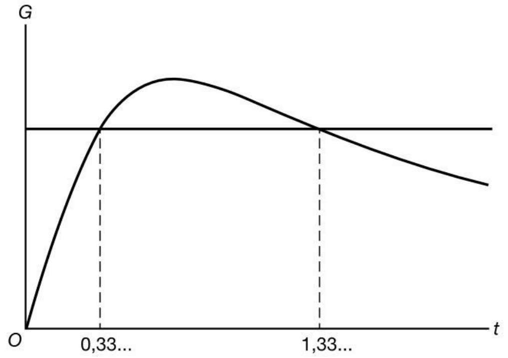
$$=\frac{8x^4-47x^2-20}{(8x^2-5)^2}$$

74 **a** $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\dfrac{(3+2t)\cdot 0-{}^-2\cdot 2}{(3+2t)^2}+5=\dfrac{4}{(3+2t)^2}+5$

b $\dfrac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}q}=2-\dfrac{(q+8)\cdot 0-1\cdot 1}{(q+8)^2}=2+\dfrac{1}{(q+8)^2}$

Bladzijde 154

75 **a** Voer in $y_1=\dfrac{6000}{9x^2+4}$ en $y_2=40$
Intersect geeft $x=0{,}33...$ en $x=1{,}33...$



Dus gedurende 1,33… − 0,33… = 1 uur.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $G = \dfrac{600t}{9t^2 + 4}$ geeft $\dfrac{dG}{dt} = \dfrac{(9t^2+4)\cdot 600 - 600t \cdot 18t}{(9t^2+4)^2} = \dfrac{5400t^2 + 2400 - 10\,800t^2}{(9t^2+4)^2}$

$= \dfrac{-5400t^2 + 2400}{(9t^2+4)^2}$

$\dfrac{dG}{dt} = 0$ geeft $-5400t^2 + 2400 = 0$

$-5400t^2 = -2400$

$t^2 = \dfrac{4}{9}$

$t = \dfrac{2}{3}$

$G_{max} = \dfrac{600 \cdot \frac{2}{3}}{9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4} = \dfrac{400}{8} = 50$ dB

c Voer in $y_2 = 25$.
Intersect geeft $x = 2{,}488$
snelheid $= G'(2{,}488) \approx -8{,}7$
De afname is 8,7 dB per uur.

76 **a** $t = q \cdot n$ geeft $t' = q' \cdot n + q \cdot n'$

$q' \cdot n = t' - q \cdot n'$

$\left.\begin{array}{l} q' = \dfrac{t' - q \cdot n'}{n} \\ q = \dfrac{t}{n} \end{array}\right\} q' = \dfrac{t' - \frac{t}{n} \cdot n'}{n}$

$q' = \dfrac{nt - tn'}{n^2}$

77 **a** $g(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 = 16 - 8 = 8$
$f(g(4)) = 8^2 = 64$
b $g(5) = 5^2 - 2 \cdot 5 = 25 - 10 = 15$
$f(g(5)) = 15^2 = 225$
c $f(g(x)) = (x^2 - 2x)^2$

78 **a** $k(x) = f(g(x))$ met $f(g) = g^6$ en $g(x) = 3 - x^5$
b $k(x) = f(g(x))$ met $f(g) = \sqrt{g}$ en $g(x) = x^2 + 1$
c $k(x) = f(g(x))$ met $f(g) = \dfrac{2}{g^3}$ en $g(x) = x + 8$

10

Bladzijde 156

79 **a** $y = -3(2x-5)^6$ geeft $\dfrac{dy}{dx} = 6 \cdot -3(2x-5)^5 \cdot 2 = -36(2x-5)^5$

b $y = \dfrac{1}{(x-4x^2)^5} = (x-4x^2)^{-5}$ geeft $\dfrac{dy}{dx} = -5(x-4x^2)^{-6} \cdot (1-8x) = \dfrac{-5(1-8x)}{(x-4x^2)^6} = \dfrac{40x-5}{(x-4x^2)^6}$

c $y = 2\sqrt{3-7x}$ geeft $\dfrac{dy}{dx} = 2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{3-7x}} \cdot -7 = \dfrac{-7}{\sqrt{3-7x}}$

d $y = \dfrac{8}{(3x+2)^4} = 8(3x+2)^{-4}$ geeft $\dfrac{dy}{dx} = -4 \cdot 8(3x+2)^{-5} \cdot 3 = \dfrac{-96}{(3x+2)^5}$

e $y = 4\sqrt{3+x^2}$ geeft $\dfrac{dy}{dx} = 4 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{3+x^2}} \cdot 2x = \dfrac{4x}{\sqrt{3+x^2}}$

f $y = \dfrac{4}{(2-x^2)^3} = 4(2-x^2)^{-3}$ geeft $\dfrac{dy}{dx} = -3 \cdot 4(2-x^2)^{-4} \cdot -2x = \dfrac{24x}{(2-x^2)^4}$

80 **a** $S = \dfrac{2}{(3-a^2)^5} = 2(3-a^2)^{-5}$ geeft $\dfrac{dS}{da} = -5 \cdot 2(3-a^2)^{-6} \cdot -2a = \dfrac{20a}{(3-a^2)^6}$

b $K = \sqrt{2q+1}$ geeft $\dfrac{dK}{dq} = \dfrac{1}{2\sqrt{2q+1}} \cdot 2 = \dfrac{1}{\sqrt{2q+1}}$

c $W = 6(p^2 - 2p + 5)^{0,7}$ geeft $\dfrac{dW}{dp} = 0{,}7 \cdot 6(p^2-2p+5)^{-0,3} \cdot (2p-2) = \dfrac{4{,}2(2p-2)}{(p^2-2p+5)^{0,3}} = \dfrac{8{,}4p - 8{,}4}{(p^2-2p+5)^{0,3}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

81 **a** $K = (5q+2)^4 - 3q$ geeft $\dfrac{dK}{dq} = 4(5q+2)^3 \cdot 5 - 3 = 20(5q+2)^3 - 3$

b $y = \dfrac{5}{(2x+1)^8} + 4x^2 = 5(2x+1)^{-8} + 4x^2$ geeft $\dfrac{dy}{dx} = -8 \cdot 5(2x+1)^{-9} \cdot 2 + 8x = \dfrac{-80}{(2x+1)^9} + 8x$

c $B = \dfrac{8}{a^3} + 6\sqrt{a^3+2} = 8a^{-3} + 6\sqrt{a^3+2}$ geeft $\dfrac{dB}{da} = -24a^{-4} + 6 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{a^3+2}} \cdot 3a^2 = -\dfrac{24}{a^4} + \dfrac{9a^2}{\sqrt{a^3+2}}$

d $P = \left(\dfrac{2}{1+q}\right)^3$ geeft $\dfrac{dP}{dq} = 3 \cdot \left(\dfrac{2}{1+q}\right)^2 \cdot \dfrac{(1+q)\cdot 0 - 2 \cdot 1}{(1+q)^2} = 3 \cdot \dfrac{4}{(1+q)^2} \cdot \dfrac{-2}{(1+q)^2} = \dfrac{-24}{(1+q)^4}$

e $N = \left(\dfrac{2t}{t-1}\right)^4$ geeft $\dfrac{dN}{dt} = 4 \cdot \left(\dfrac{2t}{t-1}\right)^3 \cdot \dfrac{(t-1)\cdot 2 - 2t \cdot 1}{(t-1)^2} = 4 \cdot \dfrac{8t^3}{(t-1)^3} \cdot \dfrac{2t-2-2t}{(t-1)^2} = 4 \cdot \dfrac{8t^3}{(t-1)^3} \cdot \dfrac{-2}{(t-1)^2} = \dfrac{-64t^3}{(t-1)^5}$

82 **a** $p = \sqrt{12\,500 - 25q}$ geeft $\dfrac{dp}{dq} = \dfrac{1}{2\sqrt{12\,500 - 25q}} \cdot -25 = \dfrac{-25}{2\sqrt{12\,500 - 25q}}$

snelheid $= \left[\dfrac{dp}{dq}\right]_{q=250} = \dfrac{-25}{2\sqrt{12\,500 - 25 \cdot 250}} \approx -0{,}16$

Dus afname met 0,16 euro per stuk.

b $R = \sqrt{12\,500q^2 - 25q^3}$ geeft $\dfrac{dR}{dq} = \dfrac{1}{2\sqrt{12\,500q^2 - 25q^3}} \cdot (25\,000q - 75q^2) = \dfrac{25\,000q - 75q^2}{2\sqrt{12\,500q^2 - 25q^3}}$

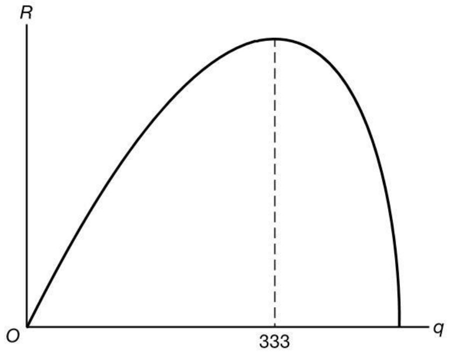
$\dfrac{dR}{dq} = 0$ geeft $25\,000q - 75q^2 = 0$

$q(25\,000 - 75q) = 0$

$q = 0 \vee 25\,000 - 75q = 0$

$q = 0 \vee -75q = -25\,000$

$q = 0 \vee q \approx 333$



De opbrengst is maximaal voor $q = 333$.

Diagnostische toets

Bladzijde 158

1 **a** Bij 9:30 uur hoort $t = 9{,}5$.

Voer in $y_1 = -0{,}014x^3 + 0{,}44x^2 - 2{,}6 + 11$.

snelheid $= \left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=9{,}5} \approx 2{,}0\,°C$ per uur.

b Bij 's middags half vier hoort $t = 15{,}5$.

$\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=15{,}5} \approx 0{,}95 > 0$, dus om half vier 's middags neemt de temperatuur toe.

c Bij 's avonds kwart voor zeven hoort $t = 18{,}75$.

$\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=18{,}75} \approx -0{,}87 < 0$, dus 's avonds om kwart voor zeven neemt de temperatuur af.

© Noordhoff Uitgevers bv

2 **a** Voer in $y_1 = \sqrt{2x-3}$.

helling $= \left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=2} = 1$

b snelheid $= \left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=3,5} = 0,5$

c k: $y = ax + b$ met $a = \left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=6} = \frac{1}{3}$

$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{3}x + b \\ x = 6 \text{ geeft } y = 3, \text{ dus } B(6, 3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{1}{3} \cdot 6 + b = 3 \\ 2 + b = 3 \\ b = 1 \end{array}$

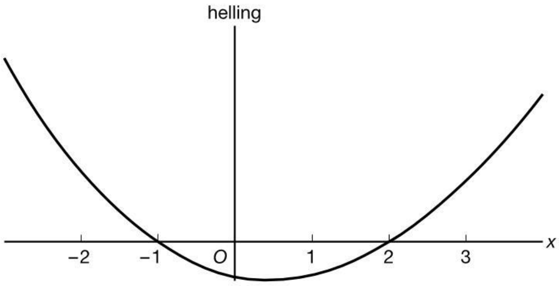
Dus k: $y = \frac{1}{3}x + 1$.

d l: $y = ax + b$ met $a = \left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=4\frac{5}{8}} = 0,4$

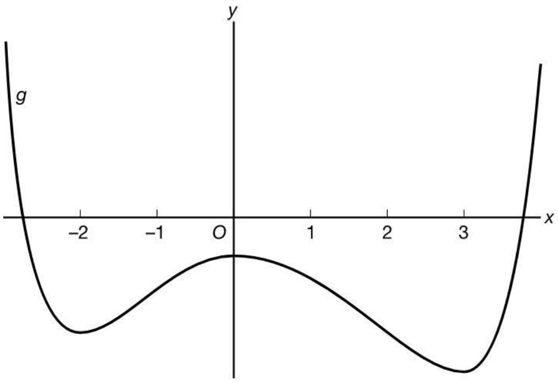
$\left.\begin{array}{l} y = 0,4 + b \\ C\left(4\frac{5}{8}, 2\frac{1}{2}\right) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0,4 \cdot 4\frac{5}{8} + b = 2\frac{1}{2} \\ 1,85 + b = 2,5 \\ b = 0,65 \end{array}$

Dus l: $y = 0,4x + 0,65$.

3



4



5 **a** $f(x) = 0,6x^3 - 1,3x^2 + 9$ geeft $f'(x) = 1,8x^2 - 2,6x$

b $g(x) = 4x^3 + x^2 - 11x + 20$ geeft $g'(x) = 12x^2 + 2x - 11$

c $h(x) = 3x - 2(x^2 - 4x) = 3x - 2x^2 + 8x = -2x^2 + 11x$ geeft $h'(x) = -4x + 11$

d $k(x) = ax^2 + bx + c$ geeft $k'(x) = 2ax + b$

6 **a** $f(x) = (3 - x)(5 + 2x) = 15 + 6x - 5x - 2x^2 = -2x^2 + x + 15$ geeft $f'(x) = -4x + 1$

b $g(x) = (3x + 1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$ geeft $g'(x) = 18x + 6$

c $h(x) = x(2x - 1)^2 = x(4x^2 - 4x + 1) = 4x^3 - 4x^2 + x$ geeft $h'(x) = 12x^2 - 8x + 1$

d $k(x) = x^3 - x(x - 3)^2 = x^3 - x(x^2 - 6x + 9) = x^3 - x^3 + 6x^2 - 9x = 6x^2 - 9x$ geeft $k'(x) = 12x - 9$

10

© Noordhoff Uitgevers bv

7 $f(x) = 0{,}2x^3 - 6x + 2$ geeft $f'(x) = 0{,}6x^2 - 6$

Stel m: $y = ax + b$ met $a = f'(5) = 0{,}6 \cdot 5^2 - 6 = 9$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 9x + b \\ y_A = f(5) = -3, \text{ dus } A(5, -3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 9 \cdot 5 + b = -3 \\ 45 + b = -3 \\ b = -48 \end{array}$$

Dus m: $y = 9x - 48$.

8 $\dfrac{dK}{dp} = 0 - 5q + 24p^2 = 24p^2 - 5q$

$\dfrac{dK}{dq} = 40q - 5p + 0 = 40q - 5p$

Bladzijde 159

9 $E(n) = 0{,}48n - an^2$ geeft $E'(n) = 0{,}48 - 2an$

$E'(n) = 0$ geeft $0{,}48 - 2an = 0$

$-2an = -0{,}48$

$n = \dfrac{0{,}48}{2a} = \dfrac{0{,}24}{a} = \dfrac{24}{100a} = \dfrac{6}{25a}$

$E(n)$ is maximaal $E\left(\dfrac{6}{25a}\right) = 0{,}48 \cdot \dfrac{6}{25a} - a \cdot \left(\dfrac{6}{25a}\right)^2 = \dfrac{2{,}88}{25a} - a \cdot \dfrac{36}{625a^2} = \dfrac{2{,}88}{25a} - \dfrac{1{,}44}{25a} = \dfrac{1{,}44}{25a}$

10 **a** $y = \dfrac{1}{5x^6} + 5x^6 \cdot \sqrt{x} = \frac{1}{5}x^{-6} + 5x^{6\frac{1}{2}}$ geeft $\dfrac{dy}{dx} = -\frac{6}{5}x^{-7} + 32\frac{1}{2}x^{5\frac{1}{2}} = -\dfrac{6}{5x^7} + 32\frac{1}{2}x^5 \cdot \sqrt{x}$

b $K = (5 + q)\sqrt{q} = 5\sqrt{q} + q\sqrt{q} = 5\sqrt{q} + q^{1\frac{1}{2}}$ geeft $\dfrac{dK}{dq} = 5 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{q}} + 1\frac{1}{2}q^{\frac{1}{2}} = \dfrac{5}{2\sqrt{q}} + 1\frac{1}{2}\sqrt{q}$

c $y = \sqrt[6]{x^5} + \dfrac{5}{x} + \dfrac{x}{6} = x^{\frac{5}{6}} + 5x^{-1} + \frac{1}{6}x$ geeft $\dfrac{dy}{dx} = \frac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}} - 5x^{-2} + \frac{1}{6} = \dfrac{5}{6 \cdot \sqrt[6]{x}} - \dfrac{5}{x^2} + \frac{1}{6}$

11 **a** $y = 0{,}5x + \dfrac{2}{x} + 1 = 0{,}5x + 2x^{-1} + 1$ geeft $\dfrac{dy}{dx} = 0{,}5 - 2x^{-2} = 0{,}5 - \dfrac{2}{x^2}$

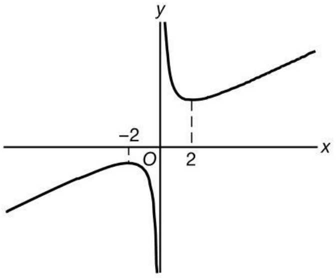
$\dfrac{dy}{dx} = 0$ geeft $0{,}5 - \dfrac{2}{x^2} = 0$

$0{,}5 = \dfrac{2}{x^2}$

$0{,}5x^2 = 2$

$x^2 = 4$

$x = 2 \vee x = -2$



y is maximaal voor $x = -2$ en $y_{max} = 0{,}5 \cdot -2 + \dfrac{2}{-2} + 1 = -1$.

y is minimaal voor $x = 2$ en $y_{min} = 0{,}5 \cdot 2 + \dfrac{2}{2} + 1 = 3$.

b Stel k: $y = ax + b$ met $a = \left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=1} = 0{,}5 - \dfrac{2}{1^2} = -1{,}5$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -1{,}5x + b \\ x = 1 \text{ geeft } y = 3{,}5, \text{ dus } A(1; 3{,}5) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -1{,}5 \cdot 1 + b = 3{,}5 \\ b = 5 \end{array}$$

Dus k: $y = -1{,}5x + 5$.

c De snelheid is $\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x = 0{,}5} = 0{,}5 - \dfrac{2}{0{,}5^2} = -7{,}5$.

© Noordhoff Uitgevers bv

12 **a** $y = 5x^{0,6} - 2x^{0,92}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 3x^{-0,4} - 1,84x^{-0,08} = \frac{3}{x^{0,4}} - \frac{1,84}{x^{0,08}}$

De snelheid is $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=6} = \frac{3}{6^{0,4}} - \frac{1,84}{6^{0,08}} \approx -0,13.$

b $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=3} = \frac{3}{3^{0,4}} - \frac{1,84}{3^{0,08}} \approx 0,25 > 0$, dus y neemt toe voor $x = 3$.

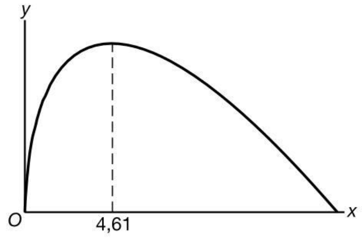
c $\frac{dy}{dx}$ geeft $3x^{-0,4} - 1,84x^{-0,08} = 0$

$3x^{-0,4} = 1,84x^{-0,08}$

$3x^{-0,4+0,08} = 1,84$

$x^{-0,32} = \frac{1,84}{3}$

$x = \left(\frac{1,84}{3}\right)^{\frac{1}{-0,32}} \approx 4,61$



Dus y is maximaal voor $x = 4,61$.

13 **a** $y = 6(3x-1)^4 + 7x$ geeft $\frac{dy}{dx} = 4 \cdot 6(3x-1)^3 \cdot 3 + 7 = 72(3x-1)^3 + 7$

b $A = \frac{3t^2}{4t-2}$ geeft $\frac{dA}{dt} = \frac{(4t-2) \cdot 6t - 3t^2 \cdot 4}{(4t-2)^2} = \frac{24t^2 - 12t - 12t^2}{(4t-2)^2} = \frac{12t^2 - 12t}{(4t-2)^2}$

c $R = 20\sqrt{5q^3 + 4q}$ geeft $\frac{dR}{dq} = 20 \cdot \frac{1}{2\sqrt{5q^3+4q}} \cdot (15q^2 + 4) = \frac{10(15q^2+4)}{\sqrt{5q^3+4q}} = \frac{150q^2 + 40}{\sqrt{5q^3+4q}}$

d $g(x) = \frac{4}{(2-3x)^4} = 4(2-3x)^{-4}$ geeft $g'(x) = -4 \cdot 4(2-3x)^{-5} \cdot -3 = \frac{48}{(2-3x)^5}$

10

© Noordhoff Uitgevers bv